

Использование WolframAlpha в преподавании математики в техническом вузе

06, июнь 2015

Маренич А. С.^{1,*}

УДК: 51:004

¹Россия, МГТУ им. Баумана

^{*}marenich-AC@yandex.ru

Введение

Современные информационные технологии активно внедряются в преподавание математических дисциплин и других базовых университетских курсов, [1] – [6]. Среди всех математических инструментов (пакетов профессиональных программ, специализированных сайтов) сервис *WolframAlpha*, [7], выделяется своей фундаментальностью и доступностью. Многие предполагают, что со временем сервис *WolframAlpha* сможет соперничать с поисковиком *Google*. Сервис очень молод и потому его место в учебном процессе пока не определено. Автор считает, что для студентов сервис *WolframAlpha* может быть инструментом изучения математики. С его помощью решаются стандартные задачи, численные вычисления наглядны. Большим преимуществом сервиса является то, что основное время студент тратит на математическое исследование задачи, а не на громоздкие вычисления. *WolframAlpha* поддерживает символьные вычисления. С помощью *WolframAlpha* студенты знакомятся с новыми возможностями использования компьютера для работы с информацией, они будут обеспечены возможностью успешно продолжать образование; подготовиться к выбранной профессиональной деятельности; трудиться в информационном обществе. Этот сервис делает знания вычислимыми и доступными всем пользователям сети *Internet*; дает ответы на запросы по естественным наукам - математике, физике, инженерии. В отличие от обычных поисковиков, сервис *WolframAlpha* возвращает не ссылки на сайты, а дает конкретные ответы на запросы. Обширность знаний сервиса *WolframAlpha* делает его удобным инструментом преподавания.

Компетенции, формируемые при использовании WolframAlpha

1. Использование WolframAlpha позволяет применить мощный вычислительный ресурс для обучения студентов математике и ее практического применения.

- WolframAlpha формирует образовательную среду, которая помогает студентам учиться. Создает новые условия для проведения занятий, которые позволяют облегчить процесс изучения математики.

- WolframAlpha дает студенту доступный справочник для поиска, доступа и показа информации по всем основным разделам математики, включая формулировки теорем, формулы и алгоритмы.

- С помощью WolframAlpha студент получает способ проверки правильности проведенных им вычислений. Чтобы объяснить найденное сервисом решение достаточно нажать кнопку *Show steps* или *Step – by – step solution*. На экран будет выведено пошаговое решение, с объяснением каждого шага.

- Студенты могут использовать сервис *WolframAlpha* при написании курсовых и дипломных работ, заданий по НИРС, при выполнении домашних заданий, домашних контрольных работ, лабораторных работ.

- WolframAlpha помогает студентам понять необходимость материала, области применения полученных знаний и опыта.

2. Преподаватель может использовать WolframAlpha на лекциях и практических занятиях для увеличения эффективности образовательного процесса и значительного углубление изучения математики.

- Предлагать студентам не только простейшие задания, иллюстрирующие изучаемую теорию, но и рассматривать более сложные примеры, встречающиеся на практике.

- WolframAlpha помогает находить учебные информационные ресурсы, устанавливает соответствие учебных материалов потребностям и интересам студентов, помогает создать учебные материалы, при помощи которых студенты эффективно решают поставленные задачи.

- WolframAlpha помогает использовать различные стратегии изучения материала, оценивать их эффективность.

- WolframAlpha помогает студентам получить индивидуальную, профессиональную обратную связь для оценки уровня усвоения материала.

- Сервис *WolframAlpha* удобно использовать для организации самостоятельной работы. Изучение технологии решения задач с помощью сервиса развивает умение определять собственные учебные цели, планирование и анализ.

- *WolframAlpha* помогает студентам осознать применимость полученных знаний и опыта.

- С помощью *WolframAlpha* можно создавать учебные материалы для более эффективного усвоения материала.

Преподаватель, использующий сервис *WolframAlpha*, должен учитывать следующие факторы.

1. Сервис *WolframAlpha* - мощный вычислительный инструмент, возможности которого далеко превосходят потребности студентов. Существует опасность заменить изучение математики, изучением кнопок, которые нужно нажать для получения ответа.

2. Для того чтобы избежать такой опасности, следует использовать сервис *WolframAlpha*, как инструмент решения вспомогательных задач, т.е. тех задач, которые не являются основными задачами изучаемой темы. Студентам должны предлагаться задачи, решение которых сводится к решению вспомогательных задач, которые можно решать сервисом *WolframAlpha*. Возможные способы формулировки таких задач предложены, например, в работе [1].

WolframAlpha играет важную роль в учебном процессе, так как формируемые компетенции, могут быть перенесены на изучение других предметов с целью создания общего информационного пространства знаний студентов.

К недостаткам сервиса *WolframAlpha* можно отнести следующее: сервис не русифицирован; стандартное время вычисления по запросу ограничено сервером; поле ввода имеет небольшой размер.

Видимые результаты использования сервиса *WolframAlpha*:

- Формируются и отрабатываются навыки сбора, систематизации, классификации, анализа информации; умения представить информацию в доступном виде; умение работать самостоятельно, делать выбор, принимать решение.
- Расширяются и углубляются знания в различных предметных областях.
- Повышается уровень информационной культуры.

Использование *WolframAlpha* в решении задач математического анализа

Пример 1. Построение графиков кривых в полярной системе координат. Пусть в сервисе *WolframAlpha* интерпретация запроса на исследования кривой имеет вид (рис.1).

$$r = 2 \left(\sin(\theta) \sqrt{\frac{|\cos(\theta)|}{\sin(50\theta) + 1.5} + \frac{1}{\cos(\theta) + 1.5}} \right)$$

Рис.1

Составляем запрос на построение графика кривой (рис.2).

polar plot (2sin(theta)sqrt(|cos(theta)|/(sin(50theta)+1.5)+1/(cos(theta)+1.5))



Input interpretation:

polar plot	$2 \sin(\theta) \sqrt{\frac{ \cos(\theta) }{\sin(50\theta) + 1.5} + \frac{1}{\cos(\theta) + 1.5}}$
------------	--

Рис.2

Сервис *WolframAlpha* строит кривую на отрезке $-\pi \leq \theta \leq \pi$: (рис.3).

Polar plots:

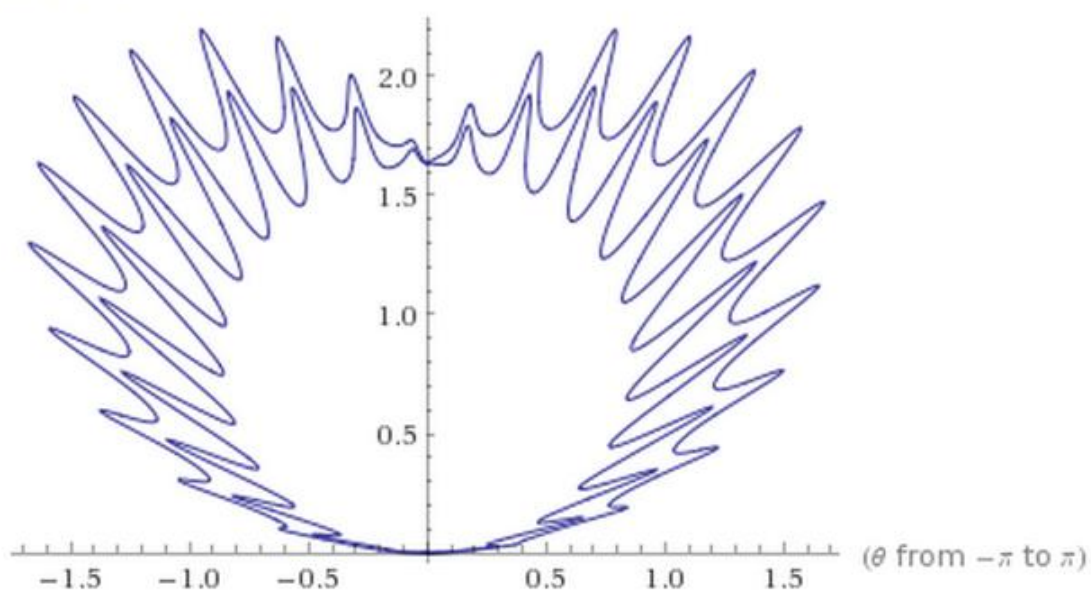


Рис.3

Пример 2. Для функции f , значения которой заданы формулой

$$f(x) = \frac{x+3}{x+4} e^{1/x}.$$

- i) Найти разложение функции f в точке $x = 3$ в ряд Тейлора.
- ii) Вычислить многочлены Тейлора $T_0(x), T_1(x), T_2(x)$ в точке $x = 3$.
- iii) Построить график функции и график многочлена $T_2(x)$ на одном рисунке.
- iv) Найти точность приближения функции f многочленом $T_2(x)$ на отрезке $[2; 4]$

Решение. i) Найдем разложение функции f в точке $x = 3$ в ряд Тейлора (Рис.4).

Input interpretation:

series	$\frac{x+3}{x+4} e^{1/x}$	point	$x = 3$
--------	---------------------------	-------	---------

Series expansion at $x=3$:

$$\frac{6\sqrt[3]{e}}{7} - \frac{11}{147}\sqrt[3]{e}(x-3) + \frac{295\sqrt[3]{e}(x-3)^2}{9261} - \frac{44399\sqrt[3]{e}(x-3)^3}{3\,500\,658} + \frac{2\,170\,153\sqrt[3]{e}(x-3)^4}{441\,082\,908} - \frac{523\,840\,199\sqrt[3]{e}(x-3)^5}{277\,882\,232\,040} + \frac{37\,659\,602\,791\sqrt[3]{e}(x-3)^6}{52\,519\,741\,855\,560} + O((x-3)^7)$$

Рис.4

ii) Находим многочлены Тейлора

$$T_0(x) = 6e^{1/3} / 7, \quad T_1(x) = \frac{6}{7}e^{1/3} - \frac{11}{147}e^{1/3}(x-3),$$

$$T_2(x) = \frac{6}{7}e^{1/3} - \frac{11}{147}e^{1/3}(x-3) + \frac{295}{9261}e^{1/3}(x-3)^2.$$

iii) Нарисуем графики функции f и многочлена $T_2(x)$ на отрезке $[2;4]$ на одном рисунке 5.

Input interpretation:

plot	$\frac{e^{1/x}(3+x)}{4+x}$	$x = 2 \text{ to } 4$
	$\frac{6\sqrt[3]{e}}{7} - \frac{11}{147}\sqrt[3]{e}(-3+x) + \frac{295\sqrt[3]{e}(-3+x)^2}{9261}$	

Plot:

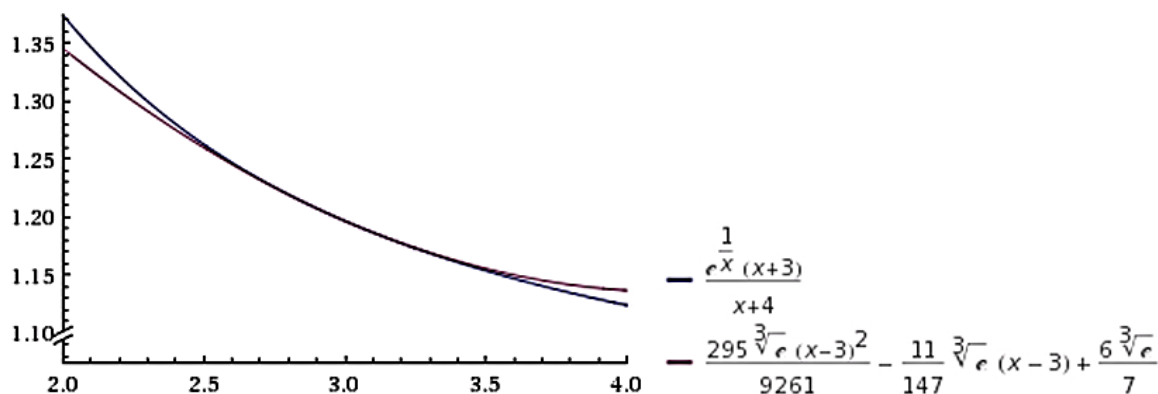


Рис.5

iv) Найдем точность приближения функции f многочленом $T_2(x)$ на отрезке, $[2;4]$, рис.6.

maximize $|((x+3)/(x+4)-6/7+(11/147)(x-3)-(295/9261)(x-3)^2)(E^{(1/3)})|$ over $[2,4]$ ☆

Input interpretation:

maximize	function	$\left \left(\frac{x+3}{x+4} - \frac{6}{7} + \frac{11}{147}(x-3) - \frac{295}{9261}(x-3)^2 \right) \sqrt[3]{e} \right $
	domain	$2 \leq x \leq 4$

Рис.6

Вычисление оценки приближения (точная форма), рис.7.

Global maximum:

Approximate form

$$\max \left\{ \left| \left(\frac{x+3}{x+4} - \frac{6}{7} + \frac{11(x-3)}{147} - \frac{295(x-3)^2}{9261} \right) \sqrt[3]{e} \right| \mid 2 \leq x \leq 4 \right\} = \frac{2417 \sqrt[3]{e}}{18522} \text{ at } x = 2$$

Рис.7

Вычисление оценки приближения (приближенная форма), рис.8.

Global maximum:

Exact form

More digits

$$\max \left\{ \left| \left(\frac{x+3}{x+4} - \frac{6}{7} + \frac{11(x-3)}{147} - \frac{295(x-3)^2}{9261} \right) \sqrt[3]{e} \right| \mid 2 \leq x \leq 4 \right\} \approx 0.182118 \text{ at } x = 2$$

Рис.8

Пример 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных $f(x, y) = (x - 2y)(y - x)$ в конечной области D , ограниченной линиями: $x + y = 6$, $4x - 8y + 5 + x^2 - 2xy + y^2 = 0$.

Решение. Составим запрос на рисование линий, рис.9.

plot $4x-8y+5+x^2-2xy+y^2=0, x+y=6$



Input interpretation:

plot

$$4x - 8y + 5 + x^2 - 2xy + y^2 = 0$$
$$x + y = 6$$

Рис.9

Найдены линии, ограничивающие область D , рис.10.

Implicit plot:

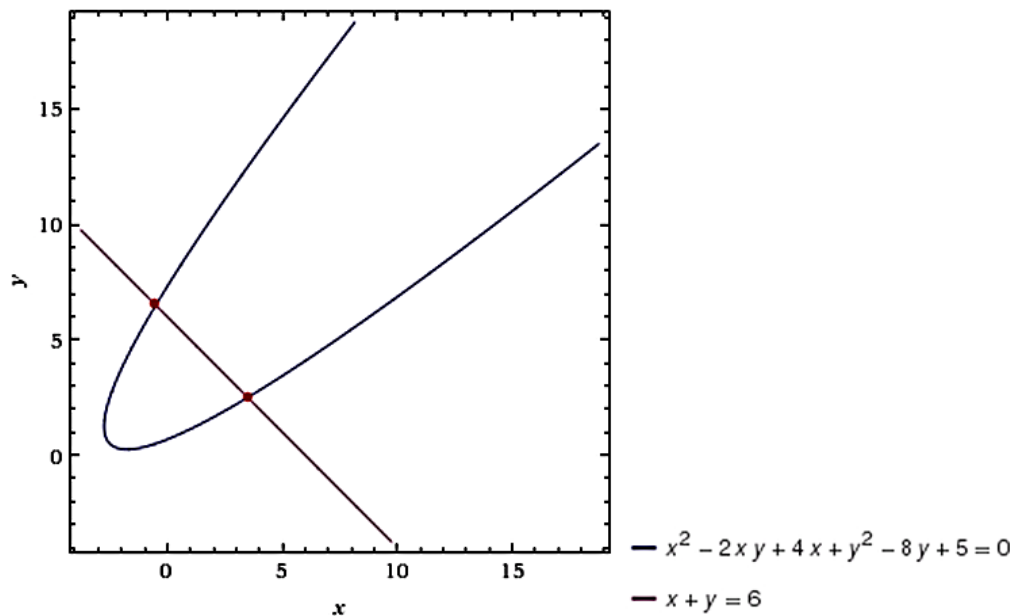


Рис.10

Составим запрос на рисование области D , рис.11.

plot $4x-8y+5+x^2-2xy+y^2 \leq 0 \ \&\& \ x+y \leq 6$



Input interpretation:

plot

$$4x - 8y + 5 + x^2 - 2xy + y^2 \leq 0 \wedge x + y \leq 6$$

Рис.11

Получаем график области D , рис.12.

Inequality plot:

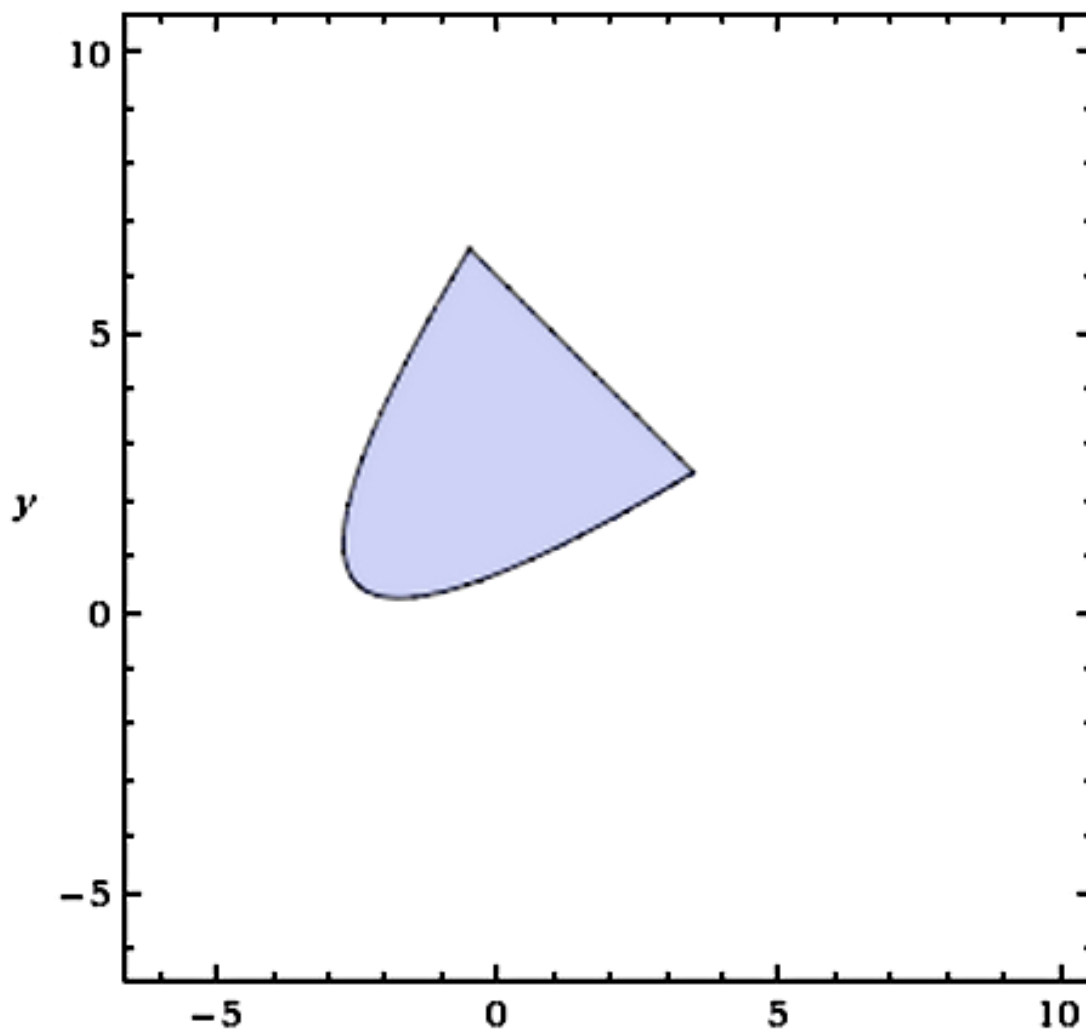


Рис.12

Составим запрос на нахождение экстремумов функции f в области D , рис.13.

extrema (x-2y)(y-x) over 4x-8y+5+x^2-2xy+y^2<=0 && x+y<=6



Input interpretation:

extrema	function	$(x - 2y)(y - x)$
	domain	$5 + 4x + x^2 - 8y - 2xy + y^2 \leq 0 \wedge x + y \leq 6$

Рис.13

Найдены экстремумы, рис.14.

Global maximum:

Approximate form

$$\max\left\{(x-2y)(y-x) \mid x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 8y + 5 \leq 0 \wedge x+y \leq 6\right\} = \frac{3}{2} \text{ at } (x, y) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

Global minimum:

Approximate form

$$\min\left\{(x-2y)(y-x) \mid x^2 - 2xy + 4x + y^2 - 8y + 5 \leq 0 \wedge x+y \leq 6\right\} = -\frac{189}{2} \text{ at } (x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{2}\right)$$

Рис.14.

Построен график функции с отмеченными на нем точками, на которых достигается наибольшее и наименьшее значения, рис. 15.

3D plot:

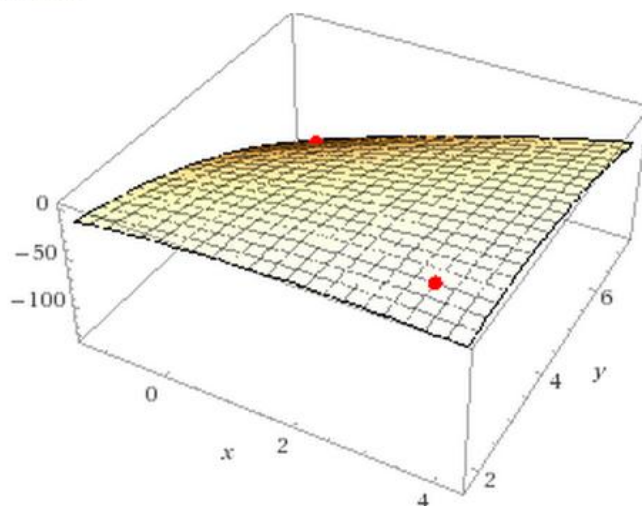


Рис. 15

Заключение

В настоящее время споры о том как, и в каком объеме, преподавать математику у инженеров, не только не утихают, а, напротив, усиливаются. Какое математическое образование нужно современному инженеру? Какие информационные технологии лучше использовать? Должна ли отличаться математическая подготовка инженеров в России от подготовки инженеров в развитых странах (где, кстати, сделан очень большой упор на изучение математики)? Как сделать, чтобы предмет «математика» для студентов, выбравших профессию инженера, стал помощником в их профессии, инструментом для анализа сложных процессов и систем? В данной заметке рассмотрено использование ресурса WolframAlpha в учебном процессе при изучении математических курсов, его преимущества перед другими ресурсами. Обоснованы формируемые компетенции.

Список литературы

1. Маренич Е.Е., Маренич А.С. Вводный курс прикладной математики. Учебное пособие. Мурманск: МГПУ. 2003. 121 с.
2. Рагулина М.И. Информационные технологии в математике. Учебное пособие для вузов по специальности "Математика". М.: Академия. 2008. 304 с.
3. Будовская Л.М., Тимонин В.И. Решение дифференциальных уравнений и их систем в среде MathCAD. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. 36 с.
4. Татарников О.И. Обзор программ для символьной математики. // Компьютер Пресс. 2006. № 7. С. 100-107.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчётах. М.: Солон-Пресс. 2004. 670 с.
6. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. / Под ред. В.Э. Фигурнова. М.: ИНФРА-М. 1998. 528с.
7. WolframAlpha: Computational Knowledge Engine. Режим доступа: <http://www.wolframalpha.com/> (Дата обращения: 14.06.2015)